

Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Calcule la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx.$$

2. Encuentre el volumen del sólido encerrado por el paraboloides $x = y^2 + z^2$ y el plano $x = 16$.

3. Sea S el sólido al interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ y encima del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

(a) Plantee la integral que calcula el volumen de S .

(b) Calcule el volumen de S .

4. Considere el tetrahedro acotado por los planos:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1,$$

con densidad $\rho(x, y, z) = y$.

a) Calcule la masa total del tetrahedro.

b) Encuentre su centro de masa.

5. Calcule

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$$

donde D es la región acotada por las rectas $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ y el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

6. Calcule la integral

$$\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y} dx dy$$

donde R es la región del plano acotada por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, $3x - y = 8$.

7. a) Escriba la ecuación de la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$ en términos de u y v , donde $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$, $y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$.

b) Evalúe la integral $\iint_D f dA$ donde D es la región acotada por la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$, y $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, usando las coordenadas u y v .

8. Evalúe la integral $\iint_D f dA$ donde D es la región en el primer cuadrante acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$, y $f(x, y) = \sin(9x^2 + 4y^2)$.

9. Calcule las siguientes integrales dobles:

(a) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy.$

(b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \cos^2(1-y) dy dx$

(c) $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dA$, donde D es el triángulo en el plano con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$ (*Ayuda:* use $u = x + y$, $v = x - y$).

10. Un alambre se dobla para que forme el cuarto de círculo $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, donde $r > 0$. Suponga que la densidad del alambre está dada por $\rho(x, y) = kxy$ donde $k > 0$.

- (a) Encuentre una parametrización del alambre.
- (b) Encuentre la masa total del alambre.
- (c) Encuentre el centro de masa del alambre.

11. Sea

$$\vec{F}(x, y) = [\cos(x - 2y), -2 \cos(x - 2y)].$$

- (a) Sea $f(x, y) = \sin(x - 2y)$. Calcule $\nabla f(x, y)$.
- (b) Evalúe $\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ para $\sigma(t) = (\frac{\pi}{2}t, \frac{\pi}{2}t)$, $0 \leq t \leq 1$.
- (c) Encuentre trayectorias σ_1 y σ_2 tales que:
 - i. $\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -1$; y,
 - ii. $\int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1$.

12. Considere la función $f(x, y) = x^2y$, el campo $\vec{F} = \nabla f$ y la trayectoria $\sigma(t) = (\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2})$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcule las siguientes integrales:

- (a) $\int_{\sigma} f ds$.
- (b) $\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

13. Evalúe

$$\int_{\sigma} yz dx + xz dy + xy dz,$$

con $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ donde σ_1 es el segmento de recta que une a $(1, 0, 0)$ con $(1, 1, 0)$ y σ_2 es el segmento de recta que une a $(1, 1, 0)$ con $(1, 1, 1)$.

14. Evalúe

$$\int_{\sigma} (2xy + e^{2y}) dx + (x^2 + 2xe^{2y}) dy,$$

donde σ es la curva correspondiente al cuarto de círculo que va de $(1, 0)$ a $(0, 1)$. (*Ayuda:* note que corresponde a una integral de línea sobre un campo gradiente)

15. Evalúe

$$\int_{\sigma} y dx + x^2 dy,$$

donde σ es la trayectoria que recorre el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en el sentido trigonométrico.

16. Considere la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

- (a) Calcule el área de la superficie de la esfera que queda encerrada en el cilindro (*Ayuda:* use coordenadas cilíndricas).
- (b) Calcule el volumen de la porción de la esfera que queda encerrada en el cilindro.

17. Sea S es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 3$.

- (a) Encuentre una parametrización de S .
- (b) Calcule

$$\iint_S f dS$$

donde $f(x, y, z) = x^2 z^2$.

18. Sea S la superficie parametrizada por

$$\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv), \quad 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1.$$

Halle el área superficial de S .

19. Sea S la superficie sobre el plano $2x + 5y + z = 10$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

(a) Encuentre una parametrización de S .

(b) Encuentre el área de S .

20. Evalúe

$$\iint_{(S, \vec{n})} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde $\vec{F}(x, y, z) = (xy, 4x^2, yz)$ y S es la gráfica de $f(x, y) = xe^y$ sobre el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ orientada por \vec{n} apuntando hacia arriba.

21. Sea S el helicoido parametrizado por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = \theta \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Calcule la siguientes integrales:

(a) $\iint_S f dS$ donde $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

(b) $\iint_{S, \vec{n}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ donde $\vec{F} = (y, x, z^2)$ y S está orientada hacia arriba.